MATEMATIKA

MAMZD21C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

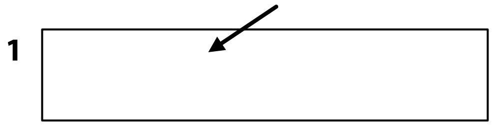
- **Didaktický test** obsahuje **26 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi pište do záznamového archu.
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- První část didaktického testu (úlohy 1–15) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 16–26) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** píšící propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

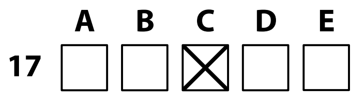
- Výsledky **pište čitelně** do vyznačených bílých polí.



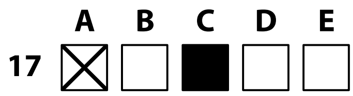
- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvěte původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědí a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

1 bod

1 Upravte na mocninu se základem 9:

$81^{90} \cdot 3^{300} =$

Řešení:

$81^{90} \cdot 3^{300} = (9^2)^{90} \cdot 3^{2\cdot 150} = 9^{2\cdot 90} \cdot (3^2)^{150} = 9^{180} \cdot 9^{150} = 9^{180+150} = \mathbf{9^{330}}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Uvnitř lesa o výměře $\frac{a^2}{2}$ je oplocena obora tvaru čtverce se stranou délky $\frac{a}{5}$, kde veličina a je vyjádřená v metrech.

(*CZVV*)

1 bod

2 Určete zlomkem v základním tvaru, jakou část lesa zabírá obora.

Řešení:

Výměra čtvercové obory: $\left(\frac{a}{5}\right)^2 = \frac{a^2}{25}$

Podíl výměry obory na výměře lesa: $\frac{a^2}{25} : \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{25} \cdot \frac{2}{a^2} = \mathbf{\frac{2}{25}}$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Rozpuštěním 2 gramů účinné látky ve vodě jsme vytvořili roztok.
Hmotnost účinné látky tvoří 5 % hmotnosti roztoku.

(*CZVV*)

1 bod

3 Vypočtěte, v kolika gramech vody jsme účinnou látku rozpustili.

Řešení:

Účinná látka 5 % ... 2 g
Voda 95 % ... **38 g** $(2 \cdot 19 = 38)$

1 bod

4 Je dán výraz:

$$\frac{\sqrt{c}-3}{9}-\frac{2}{3}$$

Určete $c \in \mathbf{R}$, pro které je hodnota daného výrazu rovna nule.

Řešení:

$$\frac{\sqrt{c}-3}{9}-\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{c}-9}{9}$$

Zlomek je roven nule, právě když je roven nule jeho čitatel:

$$\sqrt{c}-9=0$$
$$\sqrt{c}=9$$
$$\boldsymbol{c=81}$$

---

max. 2 body

5 **Pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$ zjednodušte:**

$$\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x}{2-x}\right):\frac{x^2+4}{x+2}=$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\left(\frac{2}{x+2}+\frac{x}{2-x}\right):\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{4-2x+x^2+2x}{(x+2)(2-x)}:\frac{x^2+4}{x+2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(2-x)}\cdot\frac{x+2}{x^2+4}=\frac{1}{2-x}$$

---

max. 2 body

6 **V oboru R řešte:**

$$\frac{1}{x-5}+1=\frac{2x-9}{x-5}+\frac{1}{x-1}$$

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

$$\frac{1}{x-5}+1=\frac{2x-9}{x-5}+\frac{1}{x-1} \quad \Big| \cdot (x-5)(x-1), \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \{1; 5\}$$
$$x-1+(x-5)(x-1)=(2x-9)(x-1)+x-5$$
$$x^2-x-5x+5=2x^2-2x-9x+9-4$$
$$0=x^2-5x$$
$$0=x(x-5)$$
$$x_1=0, \qquad x_2=5$$
$$\mathrm{K}=\{0\}$$

1 bod

7 **V oboru R řešte:**

$$y^2 + 40y + 400 > 0$$

Řešení:

$$y^2 + 40y + 400 > 0$$
$$(y + 20)^2 > 0$$

Pro libovolné $a \in \mathbf{R}$ platí $a^2 \geq 0$, přičemž rovnost nastane pouze pro $a = 0$, tedy:

$(y + 20)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y + 20 \neq 0$

$\mathbf{K = R \setminus \{-20\}}$

---

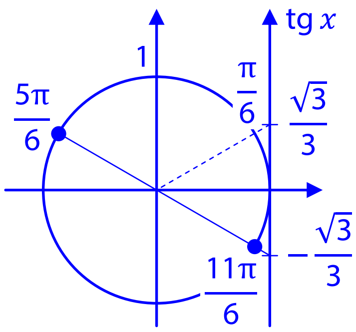
max. 2 body

8 **V intervalu** $\langle 0; 2\pi)$ **řešte:**

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = -1$$

Řešení:

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sin x}{\cos x} = -1$$
$$\sqrt{3} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = -1$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Využijeme vlastností funkce tangens a známé hodnoty $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\boldsymbol{x_1 = \frac{5\pi}{6}}, \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{11\pi}{6}}$

případně

Jedno z možných řešení rovnice $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ je $x = -30°$.

Funkce tangens má periodu 180°, v intervalu $\langle 0°; 360°)$ tak získáme dvě vyhovující hodnoty:

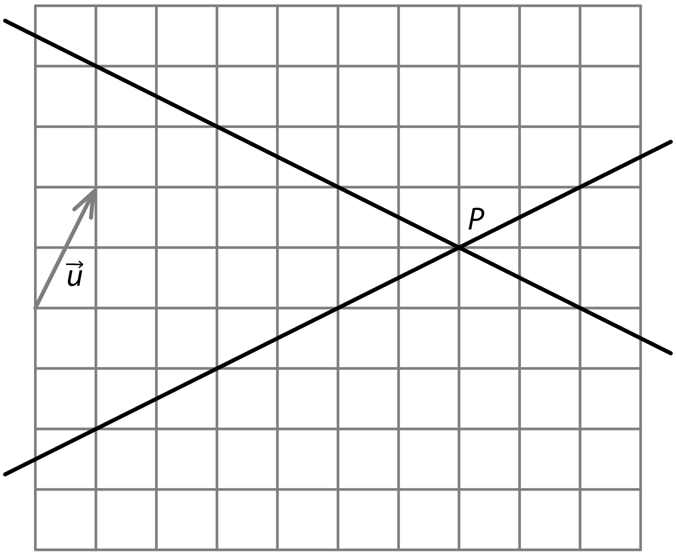
$\boldsymbol{x_1} = -30° + 180° = 150° = \boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$

$\boldsymbol{x_2} = 150° + 180° = 330° = \boldsymbol{\frac{11\pi}{6}}$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 9

V kartézské soustavě souřadnic *Oxy* je umístěn vektor $\vec{u}$ a dvě neoznačené přímky *a*, *b*, které se protínají v bodě *P*.

$\vec{u} = (1; 2)$
$a: x - 2y + 2 = 0$
$b: x + 2y - 10 = 0$



(CZVV)

max. 3 body

9

9.1 Vypočtěte obě souřadnice průsečíku $P[p_1; p_2]$ přímek *a*, *b*.

Řešení:

$P \in a \cap b$: $x - 2y + 2 = 0$

$$x + 2y - 10 = 0$$

$$\overline{}$$

$$2x - 8 = 0$$
$$x + 2y - 10 = 0$$

$$x = 4$$
$$4 + 2y - 10 = 0$$

$$x = 4$$
$$y = 3$$

***P*[4; 3]**

9.2 Vypočtěte obě souřadnice průsečíku $X[x_1; x_2]$ přímky *b* se souřadnicovou osou *x*.

Řešení:

Rovnice souřadnicové osy *x*: $y = 0$

$X \in b \cap x$: $x + 2y - 10 = 0$

$$y = 0$$

$$x - 10 = 0$$
$$y = 0$$

$$x = 10$$
$$y = 0$$

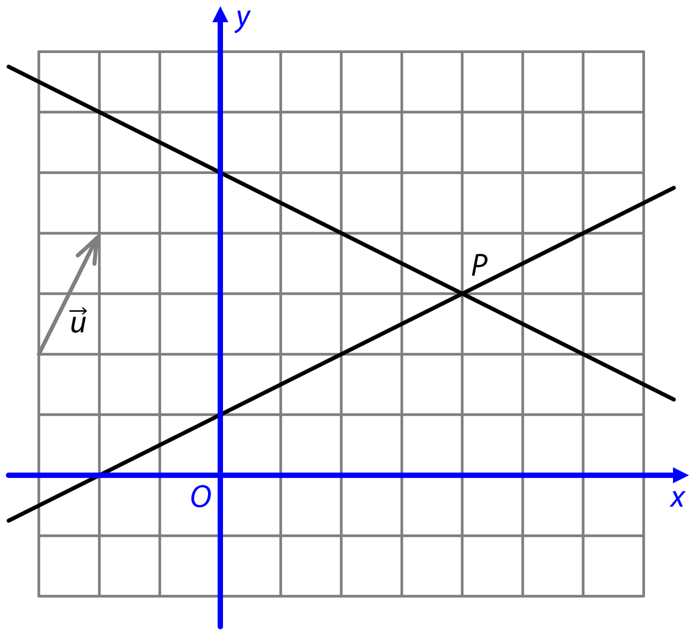
***X*[10; 0]**

9.3 V obrázku narýsujte souřadnicové osy x, y a popište počátek O soustavy souřadnic.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

Řešení:

Vektor $\vec{u} = (1; 2)$ udává jednotku i orientaci souřadnicových os.
Aby platilo $P[4; 3]$, je možné pouze následující umístění počátku O a souřadnicových os x, y.



VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 10

Pan Kraus vložil do fondu počáteční kapitál.
Vždy po uplynutí úrokovacího období v délce jednoho roku se aktuální kapitál pana Krause zvýšil o 5 %.
Za 6 let tak byl jeho kapitál ve fondu celkem o 68 019 korun vyšší než počáteční kapitál.

(CZVV)

max. 2 body

10 Vypočtěte hodnotu počátečního kapitálu pana Krause.
Výsledek zaokrouhlete na celé koruny.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:

Počáteční kapitál označíme k, celkové zvýšení kapitálu za 6 let označíme z.
Kapitál se po uplynutí každého roku zvýší 1,05krát.

Po šesti letech platí:

$$k \cdot 1{,}05^6 = k + z, \qquad z = 68\,019 \text{ Kč}$$

$$k \cdot 1{,}05^6 - k = z$$

$$k \cdot \left(1{,}05^6 - 1\right) = z$$

$$k = \frac{z}{1{,}05^6 - 1} = \frac{68\,019 \text{ Kč}}{1{,}05^6 - 1} \doteq 200\,000 \text{ Kč}$$

Počáteční kapitál pana Krause činil 200 000 korun.

Jiný způsob řešení:

Počáteční kapitál označíme K_0, úrokovou míru i a počet úrokovacích období n.
Celkové úrokové výnosy za n úrokovacích období označíme U_n.

Užijeme složené úročení:

$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n, \qquad U_n = K_n - K_0$

$i = 0{,}05, \qquad n = 6, \qquad U_6 = 68\,019\ \text{Kč}$

$U_6 = K_6 - K_0, \qquad K_6 = K_0 \cdot (1+i)^6$

$U_6 = K_0 \cdot (1+i)^6 - K_0$

$U_6 = K_0 \cdot [(1+i)^6 - 1]$

$$K_0 = \frac{U_6}{(1+i)^6 - 1} = \frac{68\,019\ \text{Kč}}{(1+0{,}05)^6 - 1} \doteq 200\,000\ \text{Kč}$$

Počáteční kapitál pana Krause činil 200 000 korun.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 11

V Kocourkově bylo vyrobeno 500 stíracích losů, z nichž 30 % obsahuje ve stíracím poli výhru. V prodeji je však pouze 80 % těchto vyrobených losů. Z losů, které nešly do prodeje, polovina obsahuje výhru.

(CZVV)

max. 2 body

11 Vypočtěte,

11.1 kolik losů v prodeji neobsahuje výhru,

Řešení:

Počet všech losů s výhrou: $0{,}3 \cdot 500 = 150$

Počet všech losů v prodeji: $0{,}8 \cdot 500 = 400$

Počet losů, které nešly do prodeje a obsahují výhru: $0{,}5 \cdot (500 - 400) = 50$

Počet losů, které obsahují výhru a jsou v prodeji: $150 - 50 = 100$

Počet losů, které jsou v prodeji a neobsahují výhru: $400 - 100 =$ **300**

11.2 jaká je pravděpodobnost, že zakoupený los bude obsahovat výhru.

Řešení:

Užijeme hodnoty vypočtené v řešení úlohy 11.1.

Počet všech losů v prodeji: 400

Počet losů, které obsahují výhru a jsou v prodeji: 100

Pravděpodobnost, že zakoupený los obsahuje výhru: $\frac{100}{400} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

Jiný způsob řešení:

Počítáme v procentech ze všech vyrobených losů.

Losy v prodeji: 80 %
Losy, které nešly do prodeje a obsahují výhru: $0{,}5 \cdot (100\,\% - 80\,\%) = 10\,\%$
Losy, které obsahují výhru a jsou v prodeji: $30\,\% - 10\,\% = 20\,\%$

Pravděpodobnost, že zakoupený los obsahuje výhru: $\frac{20\,\%}{80\,\%} = \mathbf{\frac{1}{4}}$

---

1 bod

12 Aritmetický průměr šesti **různých** kladných celých čísel je 6.

Určete největší možné číslo, které může taková šestice obsahovat.

Řešení:

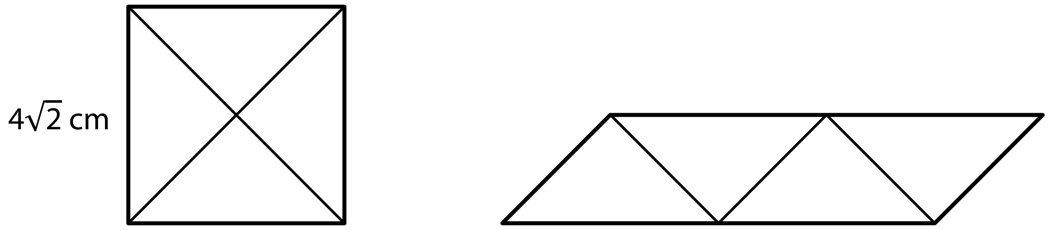
Součet libovolné šestice čísel: $6 \cdot 6 = 36$

Bude-li jedno z čísel největší možné, zbývající čísla musejí být nejmenší možná různá kladná celá čísla, tj. 1, 2, 3, 4 a 5. Největší číslo označíme x.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + x = 36$$
$$x = \mathbf{21}$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Čtverec o straně délky $4\sqrt{2}$ cm je rozdělen na čtyři shodné rovnoramenné trojúhelníky.
Z těchto čtyř trojúhelníků je sestaven zobrazený kosodélník.



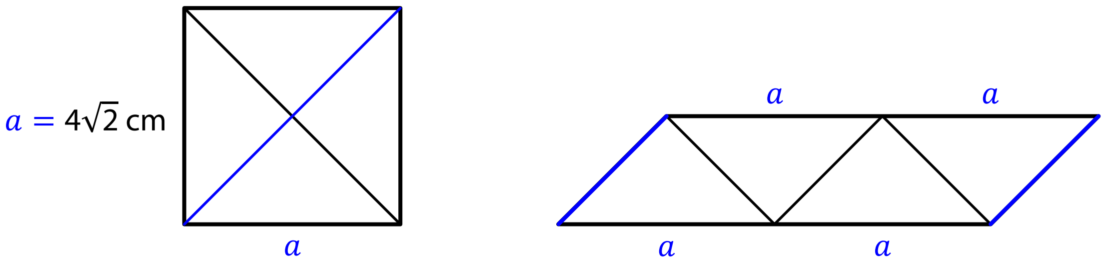
(*CZVV*)

1 bod

13 Vypočtěte, o kolik cm se liší obvod kosodélníku a čtverce.

Řešení:

Délku strany čtverce označíme a.

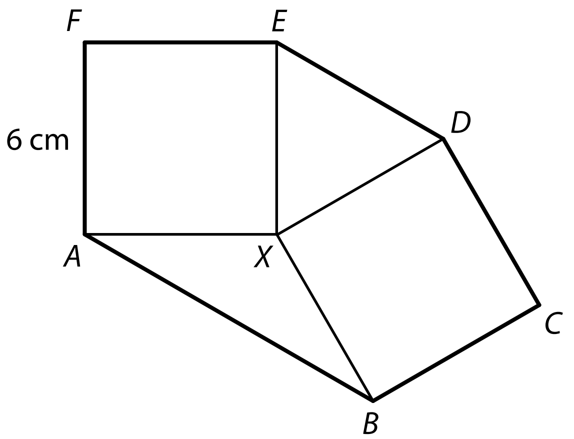


Hranice kosodélníku obsahuje oproti hranici čtverce navíc dvě modře vyznačené úsečky.
Součet délek těchto úseček je roven délce úhlopříčky čtverce: $a\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm $= 8$ cm

Obvod kosodélníku a čtverce se liší **o 8 cm**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 14

Šestiúhelník *ABCDEF* se skládá ze dvou čtverců *AXEF*, *XBCD*, rovnostranného trojúhelníku *XDE* a tupoúhlého trojúhelníku *ABX*. Délka strany *AF* je 6 cm.



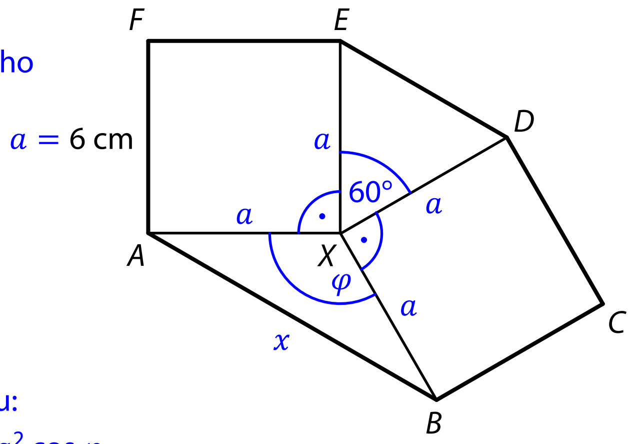
(CZVV)

max. 2 body

14 Vypočtěte v cm délku strany ***AB*****.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

Řešení:



Strany obou čtverců i strany rovnostranného trojúhelníku mají délku $a = 6$ cm.

V trojúhelníku *ABX* označíme x délku strany *AB* a φ velikost vnitřního úhlu *AXB*.

Plný úhel s vrcholem *X* je složen ze 4 úhlů:

$$90° + 60° + 90° + \varphi = 360°$$
$$\varphi = 120°$$

V trojúhelníku *ABX* užijeme kosinovou větu:

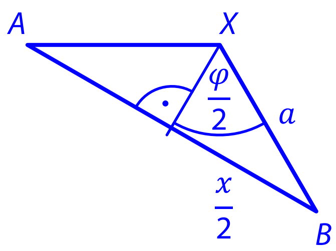
$$x^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\varphi = 2a^2 - 2a^2 \cos\varphi$$
$$x = \sqrt{2a^2 - 2a^2 \cos\varphi}$$
$$x = \sqrt{2 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6^2 \cdot \cos 120°}\ \text{cm} = \sqrt{108}\ \text{cm} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

případně

$$x^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos\varphi = 2a^2(1 - \cos\varphi)$$
$$x = \sqrt{2a^2(1 - \cos\varphi)} = a\sqrt{2 \cdot (1 - \cos\varphi)}$$
$$x = 6 \cdot \sqrt{2 \cdot (1 - \cos 120°)}\ \text{cm} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

případně (bez užití kosinové věty)

Výškou na základnu rozdělíme rovnoramenný trojúhelník *ABX* na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky, v nichž platí:



$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{x}{2}}{a}, \qquad \frac{x}{2} = a \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$$

$$x = 2a \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 2 \cdot 6 \cdot \sin\frac{120°}{2}\ \text{cm} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 6\sqrt{3}\ \text{cm}$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 15

V učitelském sboru má každý učitel čtyřikrát více kolegyň než kolegů, zatímco každá učitelka má kolegů o 40 méně než kolegyň.

(*CZVV*)

max. 3 body

15 Užitím rovnice nebo soustavy rovnic **vypočtěte, kolik učitelek je v učitelském sboru.**

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení** (popis neznámých, sestavení rovnice, resp. soustavy rovnic, řešení a odpověď).

Řešení:

Počet učitelů (mužů) v učitelském sboru označíme m a počet učitelek (žen) označíme z.

Každý učitel má ve sboru $(m-1)$ kolegů (o svou osobu méně) a z kolegyň, zatímco každá učitelka má m kolegů a $(z-1)$ kolegyň.

Platí: $z = 4(m-1)$

$m = (z-1) - 40$

Z druhé rovnice dosadíme do první a vypočteme neznámou z:

$$z = 4(z - 41 - 1)$$
$$z = 4z - 168$$
$$168 = 3z$$
$$z = 56$$

V učitelském sboru je 56 učitelek.

Jiný způsob řešení:

Učitel má o jednu kolegyni více než učitelka a o jednoho kolegu méně než učitelka.
Jestliže má učitelka o 40 kolegyň více než kolegů, pak učitel má o 42 kolegyň více než kolegů.

Počet učitelek ve sboru označíme x.
Pro kolegy a kolegyně učitele platí:

$$x - \frac{x}{4} = 42$$
$$4x - x = 168$$
$$3x = 168$$
$$x = 56$$

V učitelském sboru je 56 učitelek.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 16

Jsou dány body $A[1; 0]$, $B[11; -5]$.

Orientovaná úsečka $\overrightarrow{AC}$ je umístěním vektoru $\vec{u} = (11; -2)$.

(CZVV)

max. 2 body

16 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
16.1	Vzdálenost bodů A, C je $\sqrt{117}$.	☐	☒
16.2	Bod C má souřadnice $[10; -2]$.	☐	☒
16.3	Úsečky AC a AB jsou stejně dlouhé.	☒	☐
16.4	Bod $S[5; -2{,}5]$ je střed úsečky AB.	☐	☒

Řešení:

16.1 $|AC| = |\vec{u}| = \sqrt{11^2 + (-2)^2} = \sqrt{125}$

Tvrzení 16.1 je **nepravdivé**.

16.2 $C = A + \vec{u} = [1 + 11; 0 + (-2)] = [12; -2]$

Tvrzení 16.2 je **nepravdivé**.

16.3 $|AC| = \sqrt{125}$ (viz řešení úlohy 16.1)

$|AB| = \sqrt{(11-1)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{125}$

$|AC| = |AB|$

Tvrzení 16.3 je **pravdivé**.

16.4 $S_{AB} = \left[\frac{1+11}{2}; \frac{0+(-5)}{2}\right] = [6; -2{,}5]$

Tvrzení 16.4 je **nepravdivé**.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

Podstavou kolmého hranolu o objemu 544 cm^3 je kosočtverec. Obvod tohoto kosočtverce je 34 cm a výška kosočtverce je rovna výšce hranolu.

(CZVV)

2 body

17 Jaký je povrch hranolu?

A) 340 cm^2

B) 408 cm^2

C) 544 cm^2

D) 578 cm^2

E) jiný povrch

Řešení:

Délku strany kosočtverce označíme a, výšku kosočtverce (a rovněž výšku jehlanu) v.

Obvod kosočtverce: $o_p = 4a, \qquad o_p = 34\text{ cm}$

Délka strany kosočtverce: $a = \frac{o_p}{4} = \frac{34\text{ cm}}{4} = 8{,}5\text{ cm}$

Obsah podstavy daného hranolu (tj. obsah kosočtverce): $S_p = av$

Objem hranolu: $V = S_p v, \qquad V = 544\text{ cm}^3$

$V = av \cdot v = av^2$

Vyjádříme v^2 a vypočteme výšku v:

$$v^2 = \frac{V}{a}, \qquad v = \sqrt{\frac{V}{a}} = \sqrt{\frac{544\text{ cm}^3}{8{,}5\text{ cm}}} = 8\text{ cm}$$

Pro povrch kolmého hranolu platí:

$S = 2S_p + o_p v$

$S = 2av + o_p v = (2a + o_p) \cdot v$

$S = (2 \cdot 8{,}5\text{ cm} + 34\text{ cm}) \cdot 8\text{ cm} = 408\text{ cm}^2$

Jiný způsob řešení:

Délku strany kosočtverce označíme a, výšku kosočtverce (a rovněž výšku jehlanu) v.
Obsah podstavy označíme S_p a obvod o_p. Objem hranolu označíme V a povrch S.

$o_p = 4a, \qquad S_p = av, \qquad V = S_p v, \qquad o_p = 34\text{ cm}, \qquad V = 544\text{ cm}^3$

$a = \frac{o_p}{4}, \qquad S_p = \frac{o_p}{4} \cdot v, \qquad V = \frac{o_p}{4} \cdot v^2$

Ze vztahu pro objem vyjádříme v: $v = \sqrt{\frac{4V}{o_p}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{V}{o_p}}$

$$S = 2S_p + o_p v = 2 \cdot \frac{o_p}{4} \cdot v + o_p v = \frac{3}{2} o_p v$$

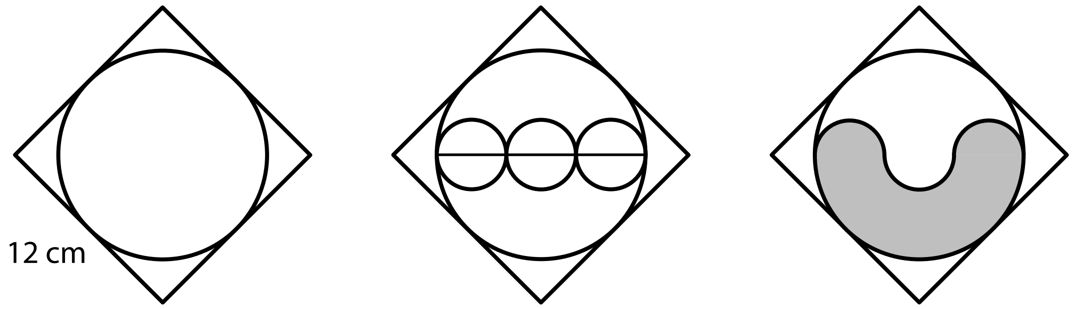
$$S = \frac{3}{2} o_p \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{V}{o_p}} = 3 \cdot \sqrt{o_p^2 \cdot \frac{V}{o_p}} = 3 \cdot \sqrt{o_p V} = 3 \cdot \sqrt{34 \cdot 544}\text{ cm}^2 = 408\text{ cm}^2$$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

Do čtverce se stranou délky 12 cm je vepsána velká kružnice.

Jeden z průměrů velké kružnice půlí každou ze tří malých shodných kružnic. Každá z těchto čtyř kružnic se dotýká právě dvou ze zbývajících kružnic.

Tmavý obrazec je ohraničen velkou půlkružnicí a třemi malými půlkružnicemi.



(*CZVV*)

2 body

18 Jaký je obsah tmavého obrazce?

A) menší než 18π cm^2

B) 18π cm^2

C) 20π cm^2

D) 24π cm^2

E) větší než 24π cm^2

Řešení:

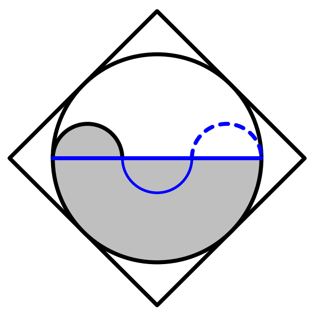
Délku strany čtverce označíme a, poloměr velké kružnice R a poloměr malé kružnice r. Obsah tmavého obrazce označíme S.

Průměr velké kružnice je roven délce strany čtverce a současně je třikrát větší než průměr malé kružnice, platí tedy:

$a = 2R, \qquad R = 3r, \qquad a = 12$ cm

$R = \frac{a}{2}, \qquad r = \frac{R}{3} = \frac{a}{6}$

Přemístěním jednoho malého tmavého půlkruhu v tmavém obrazci získáme obrazec o stejném obsahu S. Tento obrazec se skládá z velkého půlkruhu a malého půlkruhu.



$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{36}\right) = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{5a^2}{18}$$

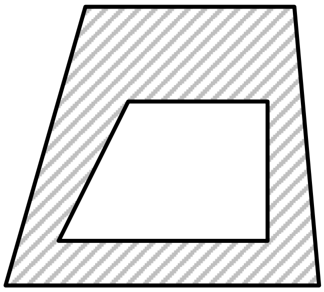
$$S = \frac{5}{36}\pi a^2 = \frac{5}{36}\pi \cdot 12^2 \text{ cm}^2 = 20\pi \text{ cm}^2$$

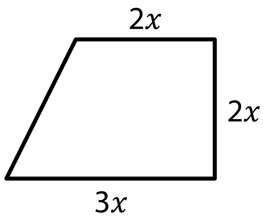
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Část šrafovaného lichoběžníku je překryta celým bílým pravoúhlým lichoběžníkem.

Bílý lichoběžník má základny délek $2x$ a $3x$ a výšku o velikosti $2x$, kde x je délka v metrech.

Ve šrafovaném lichoběžníku jsou obě základny o polovinu delší než v bílém lichoběžníku a výška je dvakrát větší než v bílém lichoběžníku.





(CZVV)

2 body

19 Jaký je obsah <u>nezakryté</u> části šrafovaného lichoběžníku?

A) menší než $8x^2$

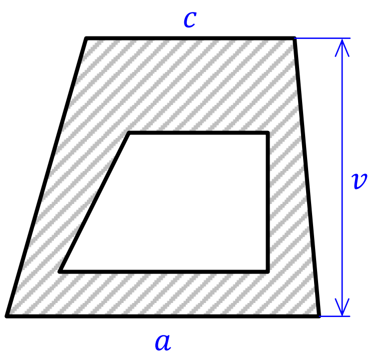
B) $8x^2$

C) $9x^2$

D) $10x^2$

E) větší než $10x^2$

Řešení:



Ve šrafovaném lichoběžníku označíme délky základen a, c a výšku v.

Platí:

$a = 1{,}5 \cdot 3x = 4{,}5x$

$c = 1{,}5 \cdot 2x = 3x$

$v = 2 \cdot 2x = 4x$

Obsah celého šrafovaného lichoběžníku:

$$S_1 = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{4{,}5x + 3x}{2} \cdot 4x = 15x^2$$

Obsah bílého lichoběžníku:

$$S_2 = \frac{3x + 2x}{2} \cdot 2x = 5x^2$$

Obsah nezakryté části šrafovaného lichoběžníku je rozdíl obsahů obou lichoběžníků:

$S_1 - S_2 = 15x^2 - 5x^2 = 10x^2$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Vytváříme dvě posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

První člen je v obou posloupnostech stejný: $a_1 = b_1 = 24$.

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **prvního** členu.

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen větší než předchozí člen vždy o 50 % **předchozího** členu.

(CZVV)

2 body

20 Kolikrát větší je člen b_{33} než člen a_{33}?
(Výsledek je zaokrouhlen na jednotky.)

A) 25 379krát

B) 36 981krát

C) 258 864krát

D) 383 502krát

E) Obě čísla jsou stejná.

Řešení:

50 % prvního členu posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$: $0{,}5a_1 = 0{,}5 \cdot 24 = 12$

V posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen o 12 větší než předchozí člen, jde tedy o aritmetickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 24$ a diferencí $d = 12$.

Pro libovolný člen a_n aritmetické posloupnosti platí: $a_n = a_1 + (n-1)d$
Konkrétně pro $n = 33$ dostaneme: $a_{33} = a_1 + 32d$

V posloupnosti $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ je druhý a každý další člen 1,5krát větší než předchozí člen, jde tedy o geometrickou posloupnost s prvním členem $b_1 = 24$ a kvocientem $q = 1{,}5$.

Pro libovolný člen b_n geometrické posloupnosti platí: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Konkrétně pro $n = 33$ dostaneme: $b_{33} = b_1 \cdot q^{32}$

Podíl třiatřicátých členů obou posloupností:

$$\frac{b_{33}}{a_{33}} = \frac{b_1 \cdot q^{32}}{a_1 + 32d} = \frac{24 \cdot 1{,}5^{32}}{24 + 32 \cdot 12} = \frac{1{,}5^{32}}{17} \doteq 25\,379$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 21

Ota Rozmařilý v období trvajícím 100 dní utrácel následujícím způsobem:

Za první den utratil celkem 10 000 korun.
Každý 5. den neutratil nic.
Ve všech ostatních dnech utratil za den vždy o 100 korun méně než za den, kdy utrácel naposledy.

(Např. 3. den utratil 9 800 korun, 4. den 9 700 korun, 5. den 0 korun a 6. den 9 600 korun.)

(CZVV)

2 body

21 Kolik korun utratil Ota Rozmařilý během 100 dní?

A) 484 000 korun

B) 560 000 korun

C) 692 000 korun

D) 2 240 000 korun

E) jiný počet korun

Řešení:

Protože Ota každý pátý den nic neutratil, ze 100 dní utrácel peníze pouze v 80 dnech.
Částky (v korunách) utrácené v těchto 80 dnech tvoří konečnou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{80}$, ve které platí:

$a_1 = 10\,000, \qquad d = -100$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

součet prvních n členů: $\quad s_n = \dfrac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Pro $n = 80$ dostaneme

poslední útratu: $\quad a_{80} = a_1 + 79d = 10\,000 + 79 \cdot (-100) = 2\,100$

celkovou útratu: $\quad s_{80} = \dfrac{80}{2} \cdot (a_1 + a_{80}) = 40 \cdot (10\,000 + 2\,100) = 484\,000$

Ota Rozmařilý utratil během 100 dní 484 000 korun.

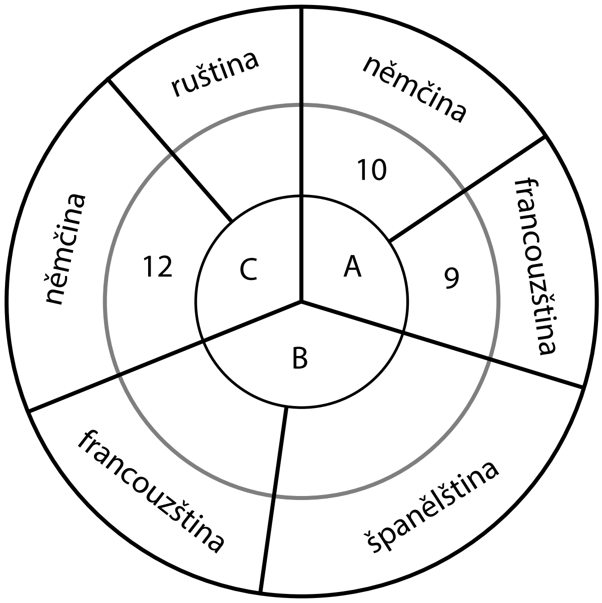
VÝCHOZÍ TEXT A DIAGRAM K ÚLOZE 22

V prvním ročníku jsou tři třídy A, B, C.
Do třídy B chodí 40 % všech žáků prvního ročníku.

Žáci každé třídy jsou rozděleni do 2 skupin podle výběru jazyka.
Ze třídy C chodí 60 % žáků na němčinu.

Některé další údaje jsou uvedeny v následujícím diagramu.

Počty žáků v jazykových skupinách



(*CZVV*)

2 body

22 O kolik se liší počty žáků ve třídách B a C?

A) o 2 žáky

B) o 3 žáky

C) o 4 žáky

D) o 6 žáků

E) o jiný počet žáků

Řešení:

Ve třídě C platí:

Němčina 60 % ... 12 žáků

Celkem ve třídě C 100 % ... 20 žáků $\left(\frac{12}{6} \cdot 10 = 20\right)$

V celém 1. ročníku platí:

Třídy A a C dohromady 60 % (100 − 40 = 60) ... 39 žáků (10 + 9 + 20 = 39)

Třída B 40 % všech žáků 1. ročníku ... 26 žáků $\left(\frac{39}{6} \cdot 4 = 26\right)$

Rozdíl počtu žáků ve třídách B a C: 26 − 20 = 6

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 23

Kód má 4 znaky.
Kód obsahuje 3 různá písmena z 5 možných (A, B, C, D, E) a jednu číslici z 10 možných (0–9).
Podmínkám vyhovují např. tři různé kódy 0ABC, C9EA, EC9A.

(CZVV)

2 body

23 Kolik různých kódů lze sestavit uvedeným způsobem?

A) 600

B) 1 800

C) 2 400

D) 7 900

E) jiný počet

Řešení:

Pro výběr jediné číslice do kódu máme 10 možností.
Vybranou číslici lze vždy umístit na kteroukoli ze 4 pozic v kódu.
Existuje tedy celkem 40 možností pro volbu a umístění číslice.

V kódu zůstanou 3 volné pozice pro tři různá písmena.
Na první pozici může být kterékoli z 5 možných písmen, na druhé již jen ze 4 možných a na třetí pozici vybereme kterékoli ze tří dosud nepoužitých písmen.

Počet všech různých kódů, které lze sestavit: $40 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\,400$
(Užili jsme kombinatorického pravidla součinu.)

Jiný způsob řešení:

Do každého kódu nejprve vybereme 4 požadované znaky (nezávisle na pořadí).
Jsou to tři písmena z 5 možných a k nim jedna číslice z 10 možných.

Počet všech skupin obsahujících 4 požadované znaky: $\binom{5}{3} \cdot 10 = 100$

V kódu však závisí i na pořadí znaků ve skupině.
Počet způsobů, jak uspořádat libovolnou ze čtyřznakových skupin: $4! = 24$

Počet všech různých kódů: $100 \cdot 24 = 2\,400$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 24

Řešíme tři rovnice v oboru **R**:

I. $(1-x)^2 = (3-x)^2$

II. $1-x = 3-x$

III. $(3-x)(1-x) = 3-x$

(CZVV)

2 body

24 Které z uvedených rovnic mají právě jedno řešení?

A) žádná z uvedených rovnic

B) pouze I. rovnice

C) pouze III. rovnice

D) právě dvě z uvedených rovnic

E) všechny tři uvedené rovnice

Řešení:

I.

$$\begin{aligned}(1-x)^2 &= (3-x)^2\\ 1-2x+x^2 &= 9-6x+x^2\\ 4x &= 8\\ x &= 2\end{aligned}$$

případně

$$\begin{aligned}(1-x)^2 &= (3-x)^2\\ |1-x| &= |3-x|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-x &= 3-x \\ 0x &= 2\end{aligned} \quad \vee \quad \begin{aligned}1-x &= x-3\\ x &= 2\end{aligned}$$

Rovnice má právě jedno řešení.

II.

$$\begin{aligned}1-x &= 3-x\\ 0x &= 2\end{aligned}$$

Rovnice nemá žádné řešení.

III.

$$\begin{aligned}(3-x)(1-x) &= 3-x\\ (3-x)(1-x)-(3-x) &= 0\\ (3-x)(1-x-1) &= 0\\ -x(3-x) &= 0\\ x_1 = 0, \qquad x_2 &= 3\end{aligned}$$

případně

$$\begin{aligned}(3-x)(1-x) &= 3-x\\ 3-4x+x^2 &= 3-x\\ x^2-3x &= 0\\ x(x-3) &= 0\\ x_1 = 0, \qquad x_2 &= 3\end{aligned}$$

Rovnice má právě dvě řešení.

Právě jedno řešení má pouze I. rovnice.

max. 4 body

25 Každou z následujících funkcí (25.1–25.4) definujeme pro $x \in (0; +\infty)$.

Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1–25.4) odpovídající graf funkce (A–F).

25.1

$$y = \frac{x^2 - x}{x}$$ F

Řešení:

$$y = \frac{x^2 - x}{x} = \frac{x(x-1)}{x} = x - 1, \qquad x \in (0; +\infty)$$

Grafem lineární funkce $y = x - 1$ je přímka, která prochází body $[0; -1]$ a $[1; 0]$.
V daném intervalu je grafem funkce část této přímky zobrazená v alternativě F.

25.2

$$y = \frac{x^3 - x}{x}$$ C

Řešení:

$$y = \frac{x^3 - x}{x} = \frac{x(x^2-1)}{x} = x^2 - 1, \qquad x \in (0; +\infty)$$

Grafem kvadratické funkce $y = x^2 - 1$ je parabola, která má vrchol v bodě $[0; -1]$ a prochází bodem $[1; 0]$.
V daném intervalu je grafem funkce část této paraboly zobrazená v alternativě C.

25.3

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2}$$ B

Řešení:

$$y = \frac{x^2 - x}{x^2} = \frac{x(x-1)}{x^2} = \frac{x-1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} + 1, \qquad x \in (0; +\infty)$$

Grafem lineární lomené funkce $y = -\frac{1}{x} + 1$ je hyperbola, která má střed v bodě $[0; 1]$ a prochází bodem $[1; 0]$.
V daném intervalu je grafem funkce část této hyperboly zobrazená v alternativě B.

25.4

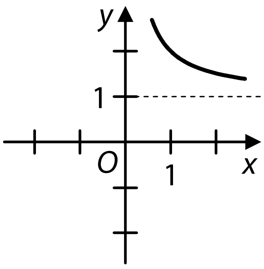
$$y = (x^2 - x) \cdot \log_4 4$$ E

Řešení:

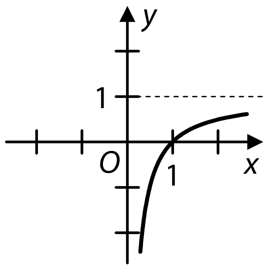
$$y = (x^2 - x) \cdot \log_4 4 = (x^2 - x) \cdot 1 = x^2 - x = x(x-1), \qquad x \in (0; +\infty)$$

Grafem kvadratické funkce $y = x^2 - x$ je parabola, která prochází body $[0; 0]$ a $[1; 0]$.
V daném intervalu je grafem funkce část této paraboly zobrazená v alternativě E.

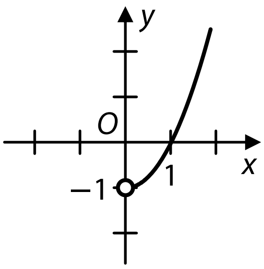
A)



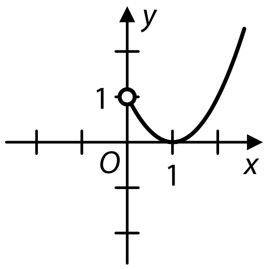
B)



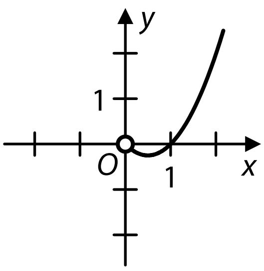
C)



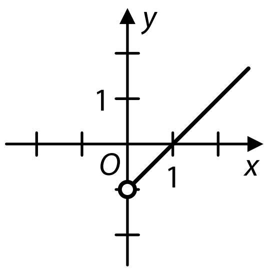
D)



E)



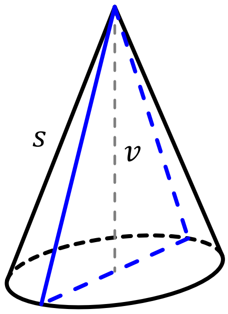
F)



max. 3 body

26 Přiřaďte ke každému rotačnímu tělesu (26.1–26.3) jeho objem (A–E).

26.1 Výška rotačního kužele je $v = 9$ cm,
strana tohoto kužele má délku $s = 11$ cm.



Jaký je objem rotačního kužele? __D__

Řešení:

Poloměr podstavy kužele označíme r.

V daném rotačním kuželi platí:

$s^2 = r^2 + v^2, \qquad v = 9 \text{ cm}, \qquad s = 11 \text{ cm}$

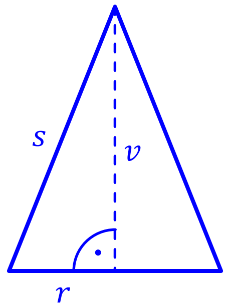
$r^2 = s^2 - v^2$

Objem kužele:

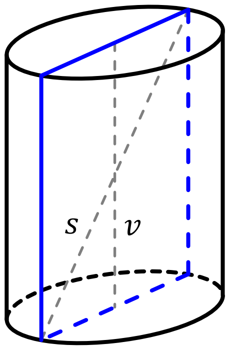
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$V = \frac{1}{3}\pi v(s^2 - v^2) = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot \left(11^2 - 9^2\right) \text{ cm}^3 = 120\pi \text{ cm}^3$$

Osový řez



26.2 Výška rotačního válce je $v = 9$ cm, největší možná přímá vzdálenost dvou bodů tohoto válce je $s = 11$ cm.



Jaký je objem rotačního válce? __A__

Řešení:

Poloměr podstavy válce označíme r a průměr d.

Největší možná přímá vzdálenost dvou bodů rotačního válce je délka úhlopříčky osového řezu tohoto válce.

V daném rotačním válci platí:

$s^2 = d^2 + v^2, \qquad r = \frac{d}{2}, \qquad v = 9 \text{ cm}, \qquad s = 11 \text{ cm}$

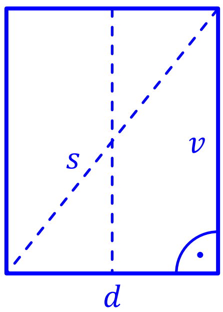
$d^2 = s^2 - v^2$

Objem válce:

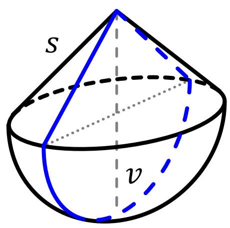
$$V = \pi r^2 v = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot v = \frac{1}{4}\pi d^2 v$$

$$V = \frac{1}{4}\pi v(s^2 - v^2) = \frac{1}{4}\pi \cdot 9 \cdot \left(11^2 - 9^2\right) \text{ cm}^3 = 90\pi \text{ cm}^3$$

Osový řez



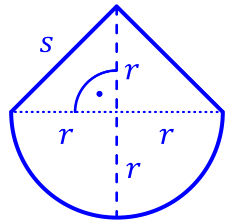
26.3 Rotační těleso je složeno z polokoule a rotačního kužele, jejichž podstavy splývají.
Strana kužele má délku $s = 5\sqrt{2}$ cm.
Výška v celého tělesa je shodná s průměrem polokoule.
(Výška je průnik tělesa s jeho osou.)



Jaký je objem rotačního tělesa? E

Řešení:

Osový řez



Poloměr polokoule (i podstavy kužele) označíme r a průměr d.
Platí: $v = d = 2r$

Výška v celého tělesa je součtem poloměru polokoule a výšky kužele.
Výška kužele je proto rovna poloměru r polokoule.

V daném rotačním kuželi platí:

$s^2 = r^2 + r^2, \qquad s = 5\sqrt{2}\text{ cm}$

$s^2 = 2r^2, \qquad r^2 = \frac{s^2}{2}, \qquad r = \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\text{ cm} = 5\text{ cm}$

Objem tělesa je součtem objemu kužele a poloviny koule:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^3$

$V = \pi r^3 = \pi \cdot 5^3\text{ cm}^3 = 125\pi\text{ cm}^3$

případně

$V = \pi r^3 = \pi\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{\pi s^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot (5\sqrt{2})^3}{2\sqrt{2}}\text{ cm}^3 = 125\pi\text{ cm}^3$

A) menší než 96π cm^3

B) 96π cm^3

C) 100π cm^3

D) 120π cm^3

E) 125π cm^3

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.